# Κβαντομηχανική ΙΙ

Κωνσταντίνος Σφέτσος,
Καθηγητής Φυσικής

Τομέας Πυρηνικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων,
Τμήμα Φυσικής,
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

## Κεφάλαιο 8: Ειδικά θέματα

22 Μαΐου 2019

# Περιεχόμενα

- Δυναμική συμμετρία στο άτομο του Υδρογόνου
- Υπερσυμμετρική κβαντομηχανική

# Δυναμική συμμετρία στο άτομο του υδρογόνου

- Για σφαιρικώς συμμετρικά δυναμικά αναμένουμε $E_{n,\ell}$.
- Για το δυναμικό Coulomb όμως $E_n = -\dfrac{e^2}{2a_0 n^2}$.
- Άρα αναμένουμε επιπλέον συμμετρία.

## Το διάνυσμα Range-Lenz στην κλασική φυσική

Η εξίσωση του Newton για ηλεκτρόνιο σε δυναμικό Coulomb

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{e^2}{m}\frac{\mathbf{r}}{r^3} \ .$$

- Το εξωτερικό γινόμενο με την τροχιακή στροφορμή $\mathbf{L}$ δίνει

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\times\mathbf{L} = -\frac{e^2}{mr^3}\left((\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}\right) = \frac{e^2}{r}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{dr}{dt}\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = e^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\ ,$$

όπου χρησιμοποίησα την ταυτότητα $\frac{dr}{dt} = \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

- Λόγω του ότι $\dfrac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$ έχουμε ότι το διάνυσμα Range-Lenz διατηρείται

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = 0\ , \qquad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{p}\times\mathbf{L}}{m} - e^2\frac{\mathbf{r}}{r}\ .$$

- Σημειώνω την ιδιότητα

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{L} = 0$$

## Το διάνυσμα Range-Lenz στην κβαντική φυσική

Λόγω του ότι $[L_i, p_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}p_k$ δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος να γράφουμε τον κβαντικό τελεστή που αντιστοιχεί στο $\mathbf{R}$.
Ορίζουμε τον τελεστή

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \mathbf{L}\times\mathbf{p}\right) - e^2\frac{\mathbf{r}}{r} \ .$$

- Μετατίθεται με την Χαμιλτονιανή

$$[H, \mathbf{R}] = 0 \ .$$

- Είναι κάθετος στην στροφορμή

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{L} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{R} = 0 \ .$$

- Θέτοντας αυθαίρετους συντελεστές $c_{1,2}$ στον ορισμό του $\mathbf{R}$, η επίτευξη του κλασικού ορίου δίνει $c_1 - c_2 = 1$. Σε συνδιασμό με την $[H, \mathbf{R}] = 0$ παίρνουμε $c_1 = -c_2 = \frac{1}{2}$.

Ορίζουμε τον τελεστή

$$\mathbf{K} = \sqrt{-\frac{m}{2H}}\mathbf{R} \ .$$

- Η $H$ εμφανίζεται ως η μείον του αντίστροφου της. Συμβατό. Το φάσμα για δέσμιες καταστάσεις είναι αρνητικό.
- Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$[L_i, K_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}K_k \ , \qquad [K_i, K_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \ .$$

- Ορίζουμε

$$M_i = \frac{1}{2}(L_i + K_i) \ , \qquad N_i = \frac{1}{2}(L_i - K_i) \ .$$

- Υπακούουν

$$[M_i, M_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}M_k \ , \qquad [N_i, N_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}N_k \ , \qquad [M_i, N_j] = 0 \ .$$

Άρα έχουμε δύο ανεξάρτητες άλγεβρες στορφορμής.

- Οι καταστάσεις των χαρακτηρίζονται με

$$\mathbf{M}^2|M,m,N,n\rangle = \hbar^2 M(M+1)|M,m,N,n\rangle \ ,$$
$$M_3|M,m,N,n\rangle = \hbar m|M,m,N,n\rangle$$

  και παρόμοια για την δράση των $\mathbf{N}^2$ και $N_3$.

- Έχουμε

$$\mathbf{M}^2 + \mathbf{N}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{K}^2) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}^2 - \frac{m}{2H}\mathbf{R}^2\right) \ .$$

- Επίσης έχουμε

$$\mathbf{R}^2 = e^4 + \frac{2H}{m}\left(\mathbf{L}^2 + \hbar^2\right) \ .$$

- Συνδιάζοντας

$$H = -\frac{me^4}{2\hbar^2 + 4(\mathbf{M}^2 + \mathbf{N}^2)} \ .$$

- Λόγω της καθετότητας των τελεστών **L** και **K** έχουμε

$$M = N \ .$$

- Άρα οι ιδιοτιμές της Χαμιλτονιανής είναι

$$E_M = -\frac{1}{2}\frac{me^4}{\hbar^2}\frac{1}{(2M+1)^2} \ .$$

  Θέτοντας $n = 2M + 1 = 1, 2, \ldots$ η παραπάνω ιδιοτιμή παίρνει τη γνωστή μορφή.

- Ο βαθμός εκφυλισμού είναι

$$(2M+1)(2N+1) = (2M+1)^2 = n^2 \ .$$

# Υπερσυμμετρική κβαντομηχανική

Ορίζουμε τον τελεστή $A$ και τον Ερμιτιανό του $A^\dagger$

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + w(x) \ , \qquad A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + w(x) \ ,$$

όπου $w(x)$ μια συνάρτηση.

- Ορίζουμε τις Χαμιλτονιανές

$$H_1 = A^\dagger A = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \ , \quad V_1(x) = w^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}w' \ ,$$
$$H_2 = AA^\dagger = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \ , \quad V_2(x) = w^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}w' \ .$$

- Έστω $\Psi_n^{(i)}$ και $E_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ οι ιδιοκαταστάσεις και ιδιοτιμές.

- Η βασική κατάσταση της $H_1$ βρίσκεται απ' την

$$\boxed{A\Psi_0^{(1)} = 0} \quad \Longrightarrow \quad \Psi_0^{(1)} \sim e^{-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\int^x dx' w(x')} \ .$$

Ανάλογα με την μορφή του $w(x)$ και το διάστημα ορισμού του $x$ η $\Psi_0^{(1)}$ μπορεί να είναι κανονικοποιήσιμη.

- Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$H_2(A\Psi_n^{(1)}) = E_n^{(1)}(A\Psi_n^{(1)}) \ , \qquad H_1(A^\dagger\Psi_n^{(2)}) = E_n^{(2)}(A^\dagger\Psi_n^{(2)}) \ .$$

Άρα

$$\boxed{E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \ , \qquad E_0^{(1)} = 0}$$

και

$$\boxed{\Psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} A\Psi_{n+1}^{(1)} \ , \qquad \Psi_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} A^\dagger\Psi_n^{(2)}} \ ,$$

από $E_{n+1}^{(1)} = \langle\Psi_{n+1}^{(1)}|H_1|\Psi_{n+1}^{(1)}\rangle$ και $E_n^{(2)} = \langle\Psi_n^{(2)}|H_2|\Psi_n^{(2)}\rangle$.

- Όλες οι καταστάσεις, εκτός απ΄ την $\Psi_0^{(1)}$, είναι σε ζεύγη
- Ο τελεστής $A$ ($A^\dagger$) μετατράπει μια ιδιοκατάσταση της $H_1$ ($H_2$) σε ιδιοκατάσταση της $H_2$ ($H_1$) καταστρέφοντας (δημιουργώντας) ένα τρόπο ταλάντωσης.
- Όλες οι ιδιοκαταστάσεις της $H_1$ μπορούν αν κατασκευαστούν από αυτές της $H_2$ και αντιστρόφως εκτός απ΄ τη βασική κατάσταση της $H_1$.

## Υπερσυμμετρική άλγεβρα

Τα φάσματα των $H_1$ και $H_2$ είναι εκφυλισμένα. Ορίζουμε τους τελεστές

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} , \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} , \quad Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

- Ικανοποιούν την υπερσυμμετρική άλγεβρα

$$[H, Q] = [H, Q^\dagger] = 0 \ , \quad \{Q, Q^\dagger\} = H \ , \quad Q^2 = Q^{\dagger 2} = 0 \ .$$

- Για τις καταστάσεις

$$\Phi_n^{(1)} = \begin{pmatrix} \Psi_n^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \Phi_n^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_n^{(2)} \end{pmatrix} , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ ,$$

έχουμε

$$Q\Phi_{n+1}^{(1)} = \sqrt{E_{n+1}^{(1)}}\Phi_n^{(2)} \ , \quad Q^\dagger \Phi_n^{(2)} = \sqrt{E_n^{(2)}}\Phi_{n+1}^{(1)} \ .$$

- Σημειώνω ότι

$$Q\Phi_n^{(2)} = 0 \ , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
$$Q^\dagger \Phi_n^{(1)} = 0 \ , \quad n = 1, 2, \dots \ .$$

- Ο εκφυλισμός οφείλεται στο γεγονός ότι $Q$ και $Q^\dagger$ εναλλάσονται με την $H$.